

Résolutions graphiques dans un repère du plan

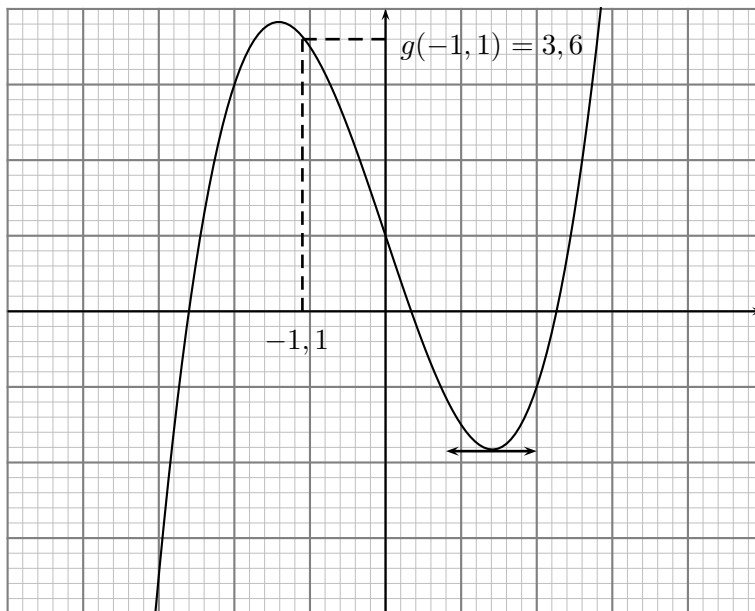


Table des matières

1	Lecture d'images	2
2	Lecture d'antécédents	4
3	Résolution d'équations	5
4	Résolution d'inéquations	6
5	Tableau de variations	8
6	Tableau de signes	9
7	Lecture du coefficient directeur d'une droite	11
8	Autour de la dérivée	12

Avant-Propos

On trouvera dans ce fichier la plupart des techniques de lecture graphique devant être maîtrisées en analyse. Aucune théorie n'est faite, seuls des exemples sont présentés ainsi que leur correction. Ils feront donc référence pour vous aider dans vos exercices.

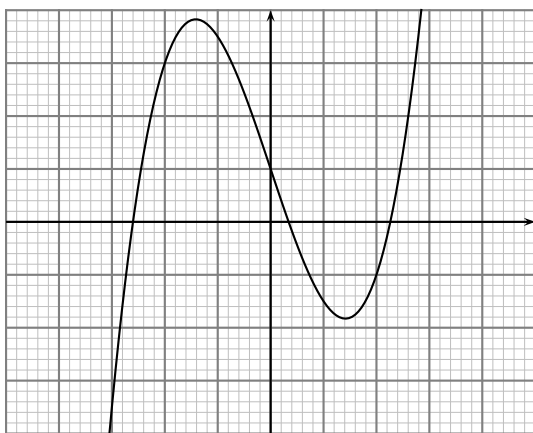
Ce fichier a été conçu avec l'idée suivante : vous vous trouvez en classe ou chez vous devant une difficulté relevant de la lecture du graphique d'une fonction. Vous ouvrez ce fichier, à la table des matières, vous vous rendez à la page qui vous concerne. Là vous analysez les exemples donnés pour que vous soyez enfin inspirés pour votre exercice.

L'ordre des exemples a été choisi par difficulté croissante. Ainsi pour comprendre une partie, il est souvent utile de lire la précédente (voir toutes les précédentes!!!).

Important. On rappelle par ailleurs, que dans l'écriture $f(x)$, le nombre x s'appelle *antécédent*, et le nombre $f(x)$ est *l'image* du nombre x . Graphiquement x représente l'abscisse d'un point et $f(x)$ son ordonnée. Tous les exemples qui suivent se basent sur cette idée.

1 Lecture d'images

Énoncé.

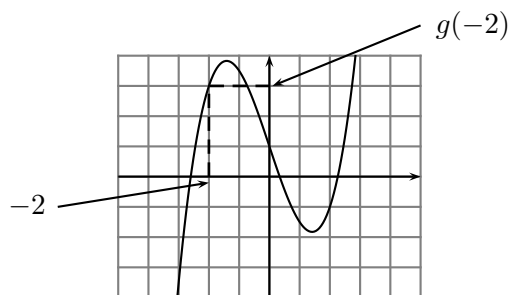


Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction g sur l'intervalle $[-5; 5]$.

1. Trouver l'image de -2 par g .
2. Combien vaut $g(0)$?
3. Trouver l'image de 4.
4. Trouver l'image de 1.

Correction.

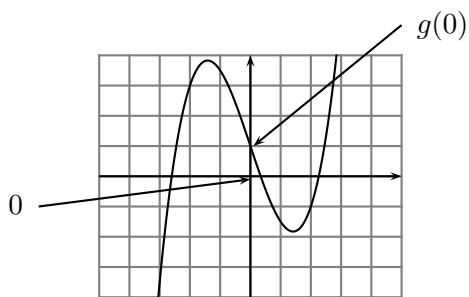
1. Trouver l'image de -2 par g .



Pour trouver l'image de -2 , on se place sur l'axe des abscisses sur le nombre -2 , on remonte (en pointillés) jusqu'à toucher la courbe. A ce moment là, on part à l'horizontale (toujours en pointillés) jusqu'à l'axe des ordonnées. L'image de -2 , à savoir $g(-2)$, se lit alors sur l'axe des ordonnées.

On a donc : $g(-2) = 3$.

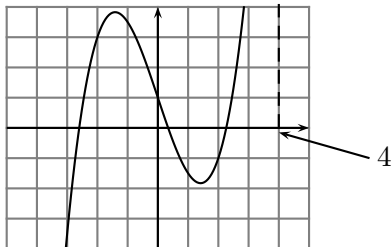
2. Combien vaut $g(0)$?



Pour trouver $g(0)$, on se place sur l'axe des abscisses sur le nombre 0, (à l'origine du repère en fait) on remonte jusqu'à toucher la courbe. On est déjà sur l'axe des ordonnées, il ne reste qu'à regarder où on s'y trouve.

On a donc : $g(0) = 1$, ou formuler autrement : "L'image de 0 par g est égale à 1".

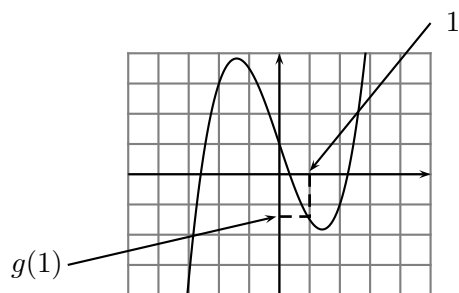
3. Trouver l'image de 4



Pour trouver l'image de 4, on se place sur l'axe des abscisses sur le nombre 4, on remonte jusqu'à toucher la courbe... Mais on ne voit plus la courbe. On ne peut donc pas répondre, car la courbe peut alors se trouver à peu près n'importe où hors du repère visible.

Il n'y a pas de réponse.

4. Trouver l'image de 1.

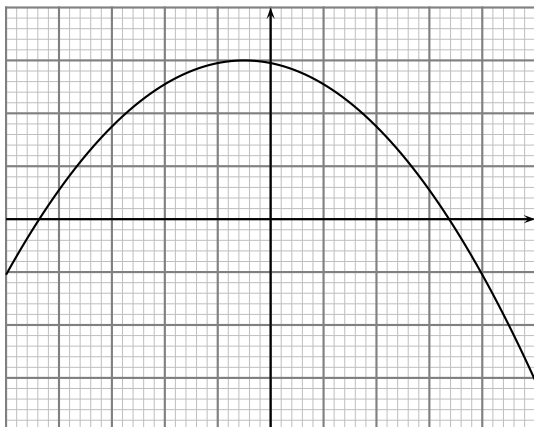


Pour trouver l'image de 1, on se place sur l'axe des abscisses sur le nombre 1, on descend (en pointillés) jusqu'à toucher la courbe. A ce moment là, on part à l'horizontale (toujours en pointillés) jusqu'à l'axe des ordonnées. L'image de 1, à savoir $g(1)$, se lit alors sur l'axe des ordonnées.

On a donc : $g(1) = -1,4$.

2 Lecture d'antécédents

Énoncé.

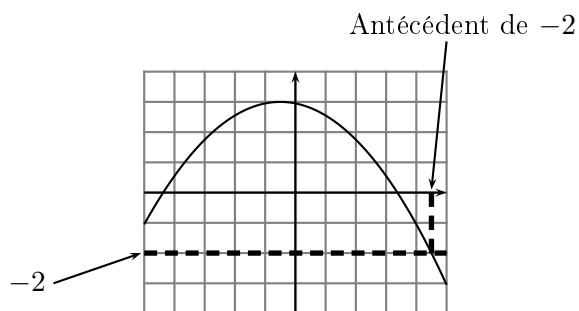


Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction f sur l'intervalle $[-5; 5]$.

1. Trouver le(s) antécédent(s) de -2 par f .
2. Trouver le(s) antécédent(s) de 1 par f .
3. Trouver le(s) antécédent(s) de 0 par f .
4. Trouver le(s) antécédent(s) de $3,5$ par f .

Correction.

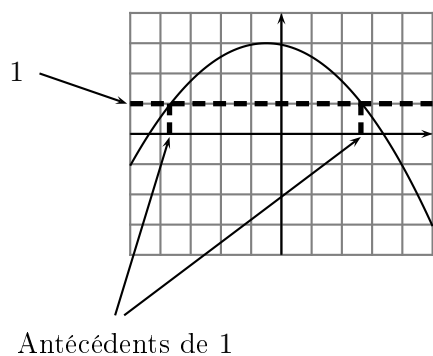
1. Trouver le(s) antécédent(s) de -2 par f .



On cherche ici les nombres x tels que $f(x) = -2$. C'est à dire que l'on cherche l'abscisse (car on cherche un x) d'un point qui se trouve à la hauteur -2 de la courbe. Pour cela on trace une droite horizontale à la hauteur -2 (la droite d'équation $y = -2$ en fait). Là où cette droite coupe la courbe on remonte vers l'axe des abscisses. On y lit alors la valeur de l'antécédent de -2 .

On a donc que $4,5$ est l'antécédent de -2 par f . En d'autres termes : $f(4,5) = -2$

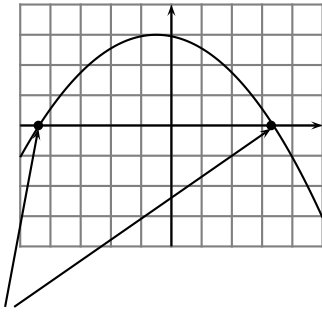
2. Trouver le(s) antécédent(s) de 1 par f .



On cherche ici les nombres x tels que $f(x) = 1$. C'est à dire que l'on cherche l'abscisse (car on cherche un x) d'un point qui se trouve à la hauteur 1 de la courbe. Pour cela on trace une droite horizontale à la hauteur 1 (la droite d'équation $y = 1$ en fait). Là où cette droite coupe la courbe (en deux points ici !) on redescend vers l'axe des abscisses. On y lit alors les valeurs des antécédents de 1 .

On a donc que 1 possède deux antécédents : $-3,7$ et $2,6$.

3. Trouver le(s) antécédent(s) de 0 par f .

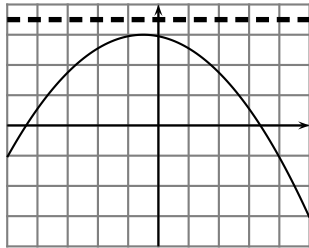


Antécédents de 0

On cherche ici les nombres x tels que $f(x) = 0$. C'est à dire que l'on cherche l'abscisse (car on cherche un x) d'un point qui se trouve à la hauteur 0 de la courbe. On cherche donc les points qui sont à la fois sur la courbe et sur l'axe des abscisses. Pas besoin donc de tracer de droite ici.

On a donc que 0 possède deux antécédents : $-4,4$ et $3,3$.

4. Trouver le(s) antécédent(s) de 3,5 par f .

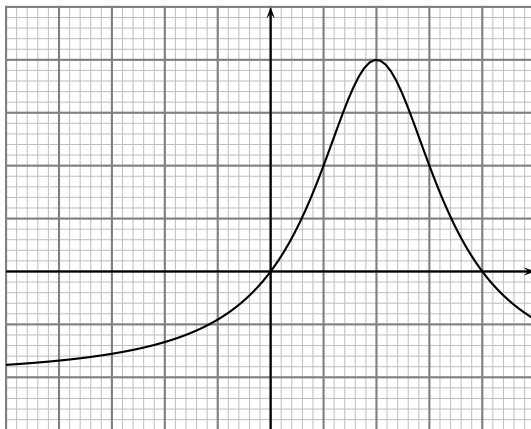


On cherche ici les nombres x tels que $f(x) = 3,5$. On trace donc une droite à la hauteur 3,5 (la droite d'équation $y = 3,5$). Et ici on voit qu'elle ne coupe jamais la courbe de f . On ne peut donc pas trouver d'antécédent à 3,5 dans l'intervalle $[-5;5]$.

Dans l'intervalle $[-5;5]$ le nombre 3,5 ne possède aucun antécédent par f .

3 Résolution d'équations

Énoncé.

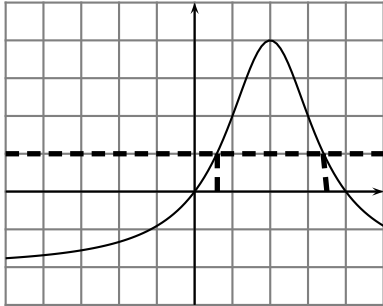


Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction h sur l'intervalle $[-5;5]$.

Résoudre l'équation $h(x) = 1$.

Correction.

Résolution de l'équation $f(x) = 1$.



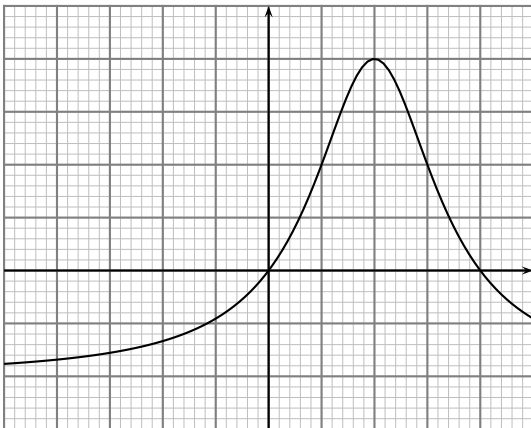
Résoudre $h(x) = 1$ veut dire que l'on cherche x tel que $h(x)$ vaut 1. Le nombre $h(x)$ est une ordonnée, on cherche donc x tel que l'on se trouve à la hauteur 1 sur la courbe. Cela revient donc à chercher les antécédents de 1. Exactement comme dans la partie précédente.

Ainsi l'équation $h(x) = 1$ possède deux solutions : $x = 0,6$ et $x = 3,4$

On vient donc de remarquer que la résolution d'une équation est exactement une recherche d'antécédent, on se réfère ainsi à la partie précédente pour plus d'explications.

4 Résolution d'inéquations

Énoncé.

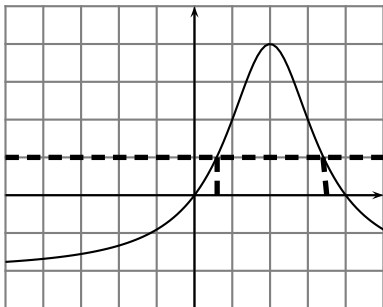


Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction h sur l'intervalle $[-5; 5]$.

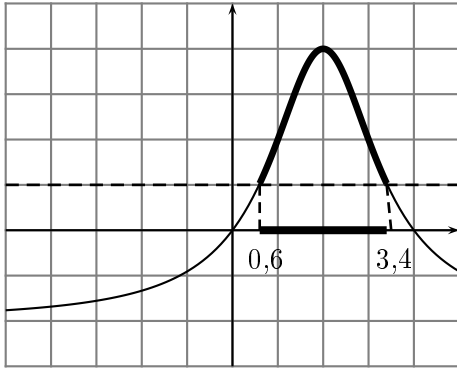
1. Résoudre l'inéquation $h(x) \geq 1$.
2. Résoudre l'inéquation $h(x) < 0$.

Correction.

1. Résoudre l'inéquation $h(x) \geq 1$.



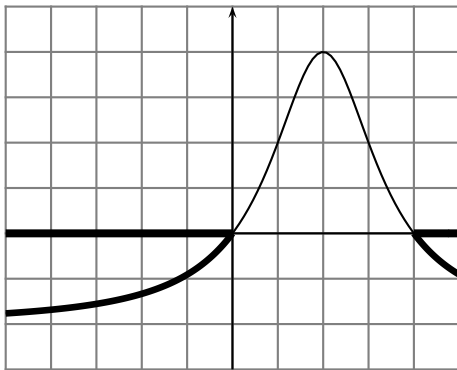
On recherche les nombres x qui vérifient $h(x) \geq 1$. C'est à dire on cherche les points dont l'ordonnée ($h(x)$) est au-dessus de la hauteur 1. Pour cela on trace la droite de hauteur 1 (d'équation $y = 1$). On voit qu'elle coupe la courbe aux points d'abscisse $x = 0,6$ et $x = 3,4$.



On regarde, et colorie, maintenant la partie de la courbe étant au-dessus de cette droite. Les solutions sont les abscisses de ces points. On colorie donc la partie de l'axe des abscisses qui correspond à la partie de la courbe également coloriée. On écrit ces solutions sous forme d'intervalle :

$$S = [0,6; 3,4]$$

2. Résoudre l'inéquation $h(x) < 0$.



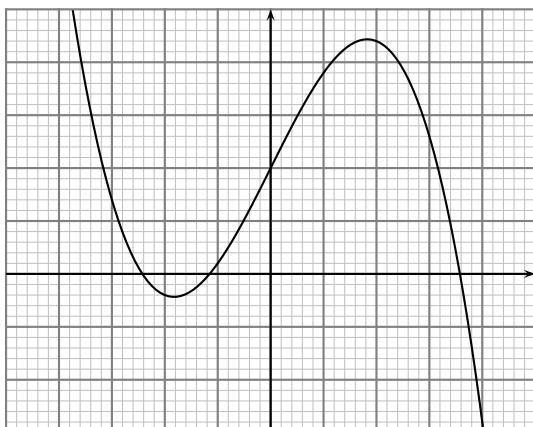
Ici pas besoin de tracer la droite de hauteur 0 : c'est l'axe des abscisses. Ainsi résoudre l'inéquation $h(x) < 0$, c'est chercher les x qui font que la courbe est au-dessous de l'axe des abscisses. On colorie donc la partie de la courbe qui se trouve au-dessous de l'axe des abscisses, puis on colorie la partie de l'axe des abscisses qui correspond à la courbe coloriée. On trouve alors deux parties coloriées. On écrit les solutions sous forme de réunion d'intervalles.

$$S = [-5; 0[\cup]4; 5]$$

On fera bien attention aux bornes des intervalles : 0 et 4 sont exclus car on résoud une inéquation stricte : on ne veut pas que $h(x)$ vale 0 (on résoud $h(x) < 0$), or $h(0) = 0$ et $h(4) = 0$, d'où leur exclusion.

5 Tableau de variations

Énoncé.

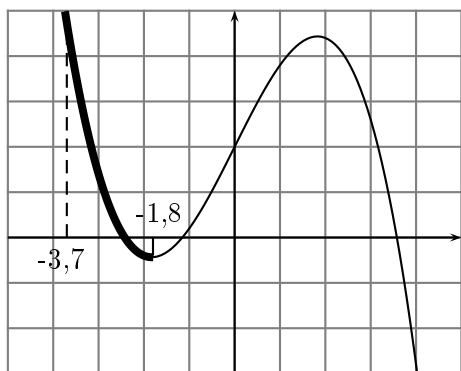


Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction g sur l'intervalle $[-5; 5]$.

Dresser le tableau de variations de g sur l'intervalle $[-5; 5]$.

Correction.

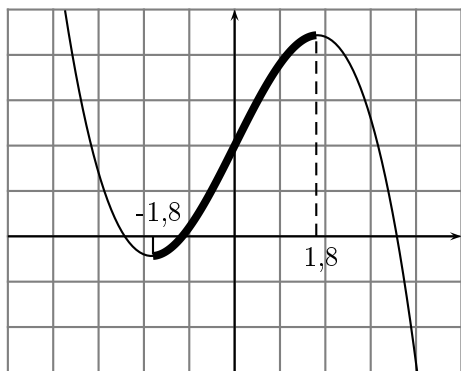
Pour dresser le tableau de variations de cette fonction, on imagine un point placer tout à gauche de la courbe et qui avance de gauche à droite (on peut aussi imaginer un ballon qui roule sur la courbe de la gauche vers la droite...). La fonction sera croissante lorsqu'on verra que le point (ou le ballon!!) "monte" et décroissante lorsqu'il "descendra".



On repère dans un premier temps une partie de la courbe qui "descend".

La courbe commence à $x = -3,7$ et descend jusqu'à $x = -1,8$.

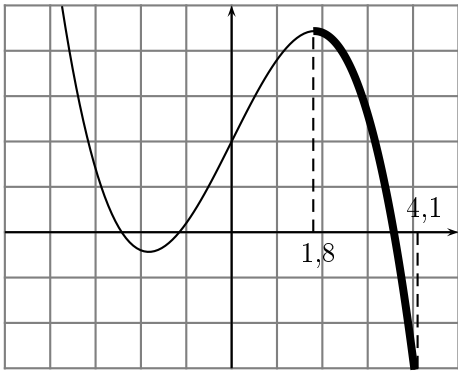
La fonction sera donc décroissante sur $[-3,7; -1,8]$



On repère ensuite une partie de la courbe qui "monte".

Cette partie de la courbe commence à $x = -1,8$ et monte jusqu'à $x = 1,8$.

La fonction sera donc croissante sur $[-1,8; 1,8]$



On repère, pour finir, une partie de la courbe qui "descend".

Cette partie de la courbe commence à $x = 1,8$ et descend jusqu'à $x = 4,1$.

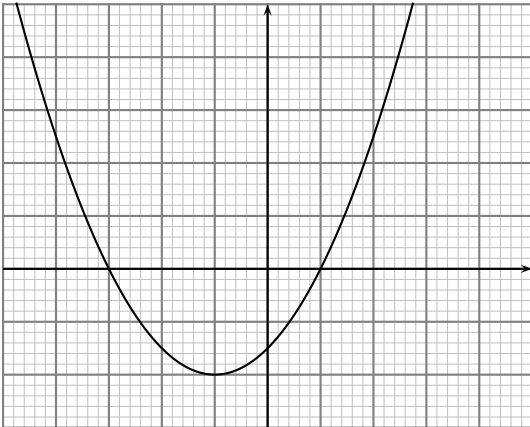
La fonction sera donc décroissante sur $[1,8; 4,1]$

On résume tout cela (on peut le faire directement) dans un tableau de variations.

x	-3,7	-1,8	1,8	4,1
$g(x)$				

6 Tableau de signes

Enoncé.

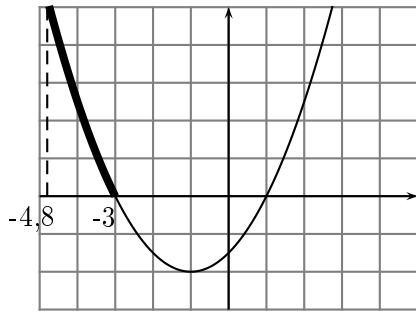


Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction f sur l'intervalle $[-5; 5]$.

Dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $[-5; 5]$.

Correction.

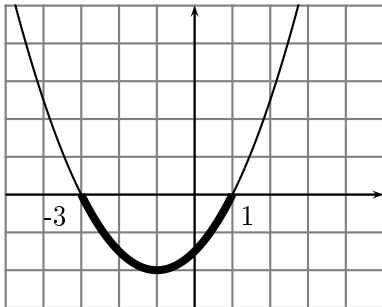
Pour connaître le signe de f sur $[-5; 5]$, il va falloir voir quand est-ce que la courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses (c'est à dire positive), et quand est-ce qu'elle est au-dessous de l'axe des abscisses (c'est à dire négative).



On repère dans un premier temps une partie de la courbe qui est au-dessus de l'axe des abscisses.

La courbe commence à $x = -4,8$ et est positive jusqu'à $x = -3$.

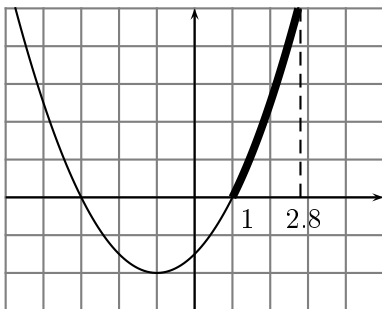
La fonction sera donc positive sur $[-4,8; -3]$



On repère ensuite une partie de la courbe qui se trouve au-dessous de l'axe des abscisses.

Cette partie de la courbe commence à $x = -3$ et s'arrête à $x = 1,8$.

La fonction sera donc négative sur $[-3; 1]$



On repère, pour finir, une partie de la courbe au-dessus de l'axe des abscisses.

Cette partie de la courbe commence à $x = 1$ et termine en $x = 2,8$.

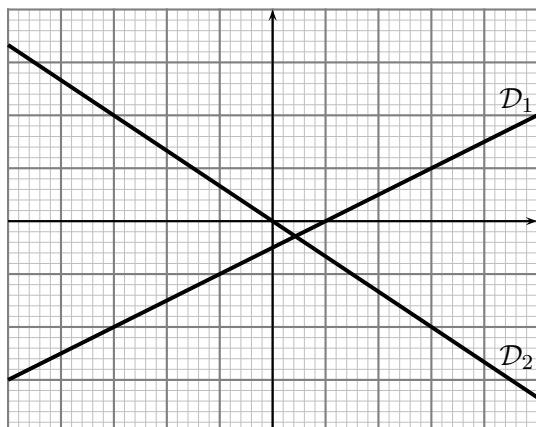
La fonction sera donc positive sur $[1; 2,8]$

On résume tout cela (on peut le faire directement) dans un tableau de signes.

x	-4,8	-3	1	2,8	
$f(x)$	+	0	-	0	+

7 Lecture du coefficient directeur d'une droite

Énoncé.



Dans le graphique ci-contre on a tracé deux droites représentant deux fonctions affines.

Trouver le coefficient directeur de chacune d'elles.

Correction.

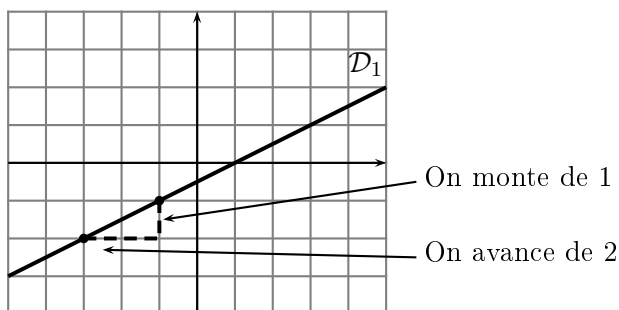
Le coefficient directeur d'une droite est donné par la formule : $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points de la droite. On rappelle que si la fonction est croissante le coefficient directeur est positif, sinon, si elle est décroissante, il est négatif.

On peut dire (de manière non formelle) que le coefficient directeur est :

$a = \frac{\text{Combien on monte}}{\text{Combien on avance}}$ pour une fonction affine croissante (droite qui "monte")

$a = \frac{-\text{Combien on descend}}{\text{Combien on avance}}$ pour une fonction affine décroissante (droite qui "descend").

1. Coefficient directeur de \mathcal{D}_1

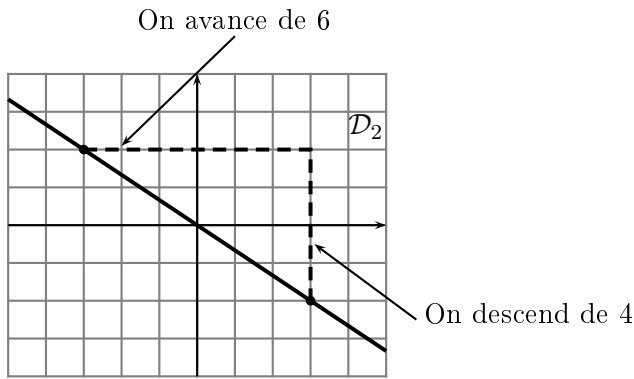


On choisit deux points bien placés sur la droite. On a pris ici les points $(-3; -2)$ et $(-1; -1)$. On regarde alors de combien on monte (1) pour aller du premier au second, et de combien on avance (2). Ainsi :

$$a = \frac{1}{2}$$

2. Coefficient directeur de \mathcal{D}_2

On procède ici exactement de la même manière que pour \mathcal{D}_1 .



On choisit deux points bien placés sur la droite. On a pris ici les points $(-3; 2)$ et $(3; -2)$. On regarde alors de combien on descend (4) pour aller du premier au second, et de combien on avance (6). Ainsi :

$$a = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

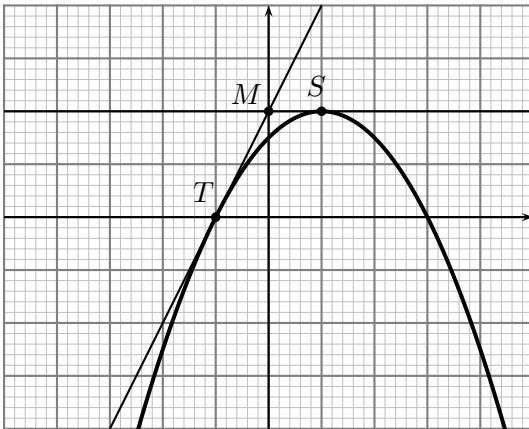
8 Autour de la dérivée

Dans cette partie, il faut se rappeler de l'interprétation graphique du nombre dérivée en un point.

Si on a une fonction f , un nombre a , alors le nombre $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

Il est donc essentielle d'avoir compris la partie précédente pour lire celle-ci.

Enoncé.



Dans le graphique ci-contre on a tracé la représentation graphique d'une fonction f . Les points $S(1, 2)$ et $T(-1, 0)$ sont sur la courbe. Le point $M(0, 2)$ est tel que les droites (MS) et (TM) sont tangentes à la courbe.

Trouver $f'(1)$ et $f'(-1)$.

Correction.

1. Valeur de $f'(1)$

Le nombre $f'(1)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. A savoir ici le coefficient directeur de MS .

Cette droite est horizontale son coefficient directeur est donc nulle, ainsi, $f'(1) = 0$.

2. Valeur de $f'(-1)$

Le nombre $f'(-1)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1 . A savoir ici le coefficient directeur de TM .

$$\text{Ainsi, } f'(-1) = \frac{y_M - y_T}{x_M - x_T} = \frac{2}{1} = 2.$$